

異種材料接合界面近傍の界面に垂直な円形き裂の
応力拡大係数の解析*野田 尚 昭^{*1}, 藤本 晋 輔^{*2}
下本 祐 介^{*3}, 鍵田 雅 幸^{*3}Analysis of an Elliptical Crack Vertical to
a Bimaterial Interface Under TensionNao-Aki NODA^{*4}, Sinsuke FUJIMOTO,
Yusuke SIMOMOTO and Masayuki KAGITA^{*4}Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper an elliptical crack vertical to a bimaterial interface is considered. The solution utilizes the body force method and requires Green's functions for perfectly bonded semi-infinite bodies. The formulation leads to a system of hypersingular integral equations whose unknown is a mode I type crack opening displacement. In the numerical calculation, the unknown body force density is approximated by using fundamental density functions and polynomials. The results show that the present method yields smooth variations of stress intensity factors along the crack front accurately. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the shape of crack, distance from the interface, and elastic constants. It is found that the stress intensity factors are mainly controlled by the root area parameter almost independent of the crack shape.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Elliptical Crack, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Fundamental Density Function

1. 緒 言

近年, 複合材料の新しい材料の使用が, 各種工業分野に広がることに伴って, 異種材料接合界面近傍のき裂の破壊力学的研究が多くなされているが, その多くは Erdogan ら⁽¹⁾⁽²⁾及び石田・野口⁽³⁾に代表される2次元問題の解析に限定されており, 3次元問題に関しては円板状き裂に関する Willis⁽⁴⁾, Erdogan ら⁽⁵⁾及び Kassir ら⁽⁶⁾の解析や, Lee-Farris-Keerの異種接合界面に対して傾いたき裂の解析⁽⁷⁾, 界面き裂に関する Shibuya ら⁽⁸⁾や Nakamura⁽⁹⁾の解析, そして結城ら⁽¹⁰⁾の境界要素法の解析のようにいくつか研究はあるものの, 利用できる解析は比較的少ない。

著者らは, このような状況を考慮して, さきに界面に平行な円形き裂の問題を考察した⁽¹¹⁾. そして, 界面近傍の円形き裂の最大応力拡大係数がき裂の形状比 a/b にあまり依存せず, $\sqrt{\text{area}}$ (area : 4章で定義するき裂とみなす面積)を用いて界面からの距離のみの関数として表現できることを指摘した⁽¹¹⁾⁽¹²⁾. さらに3次元界面き裂および, 傾斜機能材料中の3次元き裂の最大応力

大係数についても $\sqrt{\text{area}}$ によって良く整理できることを示した⁽¹²⁾. しかし, 実際の異種接合界面近傍に存在する欠陥やき裂は, 当然界面に平行であるとは限らないので, 他の条件下のき裂を考察する必要がある. そこで本研究では, 異種材料接合界面近傍に円形き裂が界面に垂直に存在する3次元問題(図1)を取り扱う. 図1で $a/b \rightarrow \infty$ に相当する2次元問題については石田・野口⁽³⁾らによって求められているが, 3次元問題は特に複雑であるためそのような研究は見当たらない. また, 野口ら⁽¹³⁾及び小田ら⁽¹⁴⁾は図1で $\mu_2/\mu_1 = 0$ に相当する自由

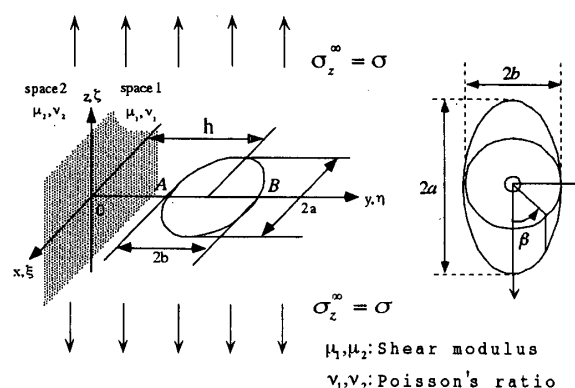


Fig.1 An elliptical crack vertical to a bimaterial interface $(x^2/a^2 + (y-h)^2/b^2 = 1)$.

* 原稿受付 2003年2月26日.

^{*1} 正員, 九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).^{*2} 九州工業大学工学部.^{*3} 九州工業大学大学院.

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

表面近傍の3次元き裂を解析しているが、本研究ではより一般的に剛性比の変化による界面の影響を明らかにする。なお、図1でき裂が界面に接するようにして存在する場合の解析は、特に重要であるので、さきに研究を行い報告している^{(15)~(17)}。

解析法としては体積力法を用いて問題を表現し、その特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する⁽¹⁸⁾。この方法によれば、き裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布と、き裂面全体での高い境界条件の満足度が得られる。従って、界面からの距離が近い場合も含めて高精度に解析できる。結局、実用上必要な3次元き裂を対象として界面からの距離、き裂の形状比、及び材料の剛性比を変化させてそれらのパラメータがき裂の応力拡大係数に及ぼす影響を明らかにするとともに、特に $\sqrt{area}$ パラメータで任意の形状比の3次元き裂が評価できるかどうかを確認することを目的とする。

2. 体積力法の特異積分方程式

図1に示すように、異材無限板中の異材界面に垂直な円形き裂に遠方で引張り方向に力をかけた場合についての応力拡大係数の解析を行なう。材料1の方に界面に垂直な、円形 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ き裂が存在するものとする。このとき体積力法の考え方によれば、問題はき裂の存在しない無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された z 方向の引張型の標準型体積力対の密度 $f_z(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分で表現される⁽¹²⁾。ここで (ξ, η, ζ) は着力点の (x, y, z) 座標である。また ν_1, ν_2 はポアソン比である。

$$\frac{(1-2\nu_1)}{8\pi(1-\nu_1)^2} \left[\iint_S \frac{f_z(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta + \iint_S K_z^{fs}(\xi, \eta, x, y) f_z(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -\sigma_z^\infty \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$K_z^{fs}(\xi, \eta, x, y) = \left. \begin{aligned} & \frac{2C(\kappa_1 + 1) - 3A(\kappa_1^2 - 2\kappa_1 + 3)}{2r_2^3} \\ & + \frac{3A[12y\eta - (3 - \kappa_1)(\kappa_1 - 1)(y + \eta)^2]}{2r_2^5} \\ & + \frac{3[A\kappa_1^2 + 2A\kappa_1 + B - 2C(\kappa_1 + 1)]}{2r_2(r_2 + y + \eta)^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}$$

$$A = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \kappa_1\mu_2), \quad B = (\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)$$

$$C = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2), \quad \kappa_1 = 3 - 4\nu_1, \quad \kappa_2 = 3 - 4\nu_2$$

$$S = \left\{ (\xi, \eta) \left| \left(\xi/a \right)^2 + \left((\eta - h)/b \right)^2 \leq 1 \right. \right\}$$

である。

式(1)は仮想き裂面上における境界条件 $\sigma_z = 0$ に相当する。左辺の $1/r_1^3$ を含む項は無限体中の円形き裂の存在を表現し、注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するときに特異性を示す特異項であり、 $\iint_S$ は発散積分の有限部分を表わす。 $K_z^{fs}(\xi, \eta, x, y)$ は自由表面の境界条件を満足させる関数である。領域 S はき裂のない無限体中に想定した円形き裂となるべき仮想き裂面を表している。

3. 特異積分方程式の数値解析法

従来用いられていた未知関数を階段関数で近似する方法では本来滑らかで連続な関数として分布してははずの体積力対密度 $f_z(\xi, \eta)$ が不連続な関数として近似されているため応力拡大係数を求める際に外挿しなければならないことや、応力拡大係数の滑らかな分布を求めることが難しい等の問題があった。そこで、体積力対密度 $f_z(\xi, \eta)$ を以下のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} f_z(\xi, \eta) &= F_z(\xi_a, \eta_b) w_z(\xi_a, \eta_b) \\ w_z(\xi_a, \eta_b) &= \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma_z^\infty}{(1-2\nu)E(k)} \sqrt{1 - \xi_a^2 - \eta_b^2} \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \\ k &= \sqrt{1 - (b/a)^2} \quad \xi_a = \xi/a \quad \eta_b = (\eta - h)/b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $w_z(\xi_a, \eta_b)$ は基本密度関数と呼ばれるもので無限体中の xy 平面上にある円形き裂の遠方で、 σ_z^∞ が作用したときの円形き裂の応力場を厳密に表現する体積力密度に相当する（実際の数値計算では $\sigma_z^\infty = 1$ とおく）。また、 (ξ_a, η_b) はき裂中心からの (x, y) 座標の距離を表している。式(3)のような表現を用いれば式(1)は基本密度にかける重み関数 $F_z(\xi_a, \eta_b)$ を未知関数とする式(4)で表現される。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{b}{2\pi E(k)} \left[\iint_S \frac{F_z(\xi_a, \eta_b)}{r_1^3} \sqrt{1 - \xi_a^2 - \eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_z^{fs}(\xi, \eta, x, y) F_z(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1 - \xi_a^2 - \eta_b^2} d\xi d\eta \right] \\ & = -\sigma_z^\infty \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで重み関数 $F_z(\xi_a, \eta_b)$ としては問題の対称性ならびに、なるべく少ない項数で多様な関数形を表現できることを考慮した多項式を用いる。具体的には式(5)のように z 方向引張り型体積力対のときの重み関数 $F_z(\xi_a, \eta_b)$ は $\alpha_i (i=0, 1, 2, \dots, (n+1)(n+2)/2)$ を係数とする ξ_a の偶数乗と η_b のべき乗の組み合わせによる多項式の表現を採用した。すなわち $F_z(\xi_a, \eta_b)$ は以下のように表される。

Fig.2 Boundary collocation points.

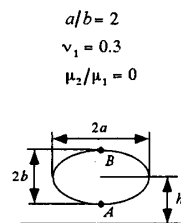
ほとんどの場合両者は有効数字4けたまで一致している。

4.3 界面に垂直な3次元き裂の応力拡大係数

表4は剛性比 $\mu_2/\mu_1 = 0, 0.5, 2, \infty$ で、形状比 $a/b = 1, 2, \infty$ の場合に $h/b = 1.05 \sim \infty$ として、 $\beta = \pi/2, \beta = 3\pi/2$ の応力拡大係数 F_{Ib}, F_{Ia} をまとめたものである。ここで、 $a/b = \infty$ は先に行なった2次元問題の解析プログラムによって求めた⁽²¹⁾。表4にはそれぞれの μ_2/μ_1 と h/b の組み合わせにおいて $a/b = 1$ の結果と $a/b = \infty$ の結果の比も $(a/b = 1)/(a/b = \infty)$ として示す。 F_I の比は、 $h/b = 1.05$ では $0.45 \sim 0.78$ の範囲となっているのに対して F_I^* の比は

Table 3 Results of an elliptical crack vertical to an interface.

h/b	F_{Ib}		F_{Ia}	
	Present results	Noguchi-Ishida	Present results	Noguchi-Ishida
∞	0.826	0.826	0.826	0.826
2	0.855	0.855	0.838	0.838
1.8	0.868	0.868	0.842	0.842
1.6	0.890	0.890	0.848	0.847
1.4	0.934	0.933	0.857	0.856
1.3	0.973	0.973	0.863	0.862
1.25	1.002	1.001	0.867	0.867
1.2	1.041	1.040	0.872	0.871
1.1	1.186	1.188	0.884	0.883
1.05	1.378	1.373	0.894	0.892



$0.71 \sim 1.24 \approx 1$ となっており形状比の影響は比較的小さく $\sqrt{\text{area}}$ による整理が有効であるといえる。

図3は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき、 F_{Ib}, F_{Ia} と h/b の関係を示す。一方、図4は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき、 F_{Ib}^*, F_{Ia}^* と h/b の関係を示す。両者を比べると F_{Ib}^*, F_{Ia}^* はき裂形状に不敏感であり、狭い範囲に整理されることがわかる。

図5(a),(b)は $a/b = 1, 2, h/b = 1.2, v_1, v_2 = 0.3$ と固定して $\mu_2/\mu_1 = 0 \sim \infty$ と変化した場合のき裂先端における応力拡大係数 F_I の分布を示す。また、図6(a),(b)は $a/b = 1, \mu_2/\mu_1 = 0, \infty, v_1, v_2 = 0.3$ のとき、図7(a),(b)は $a/b = 2, \mu_2/\mu_1 = 0, \infty, v_1, v_2 = 0.3$ での $h/b = 1.05 \sim \infty$ の応力拡大係数 F_I の分布を示す。図5(a)を例にとると、点Aにおける $\mu_2/\mu_1 = 0$ での F_I の値は $\mu_2/\mu_1 = 1$ に比べて15.2%危険になるのに対して、 $\mu_2/\mu_1 = \infty$ での値は12.8%安全になる。同様に、点Aにおける $\mu_2/\mu_1 = 0.5$ での F_I の値は $\mu_2/\mu_1 = 1$ に比べて4.5%危険になるのに対して、 $\mu_2/\mu_1 = 2$ での値は4.3%安全になる。このような結果は図5(b)や図6、図7でも認められる。本解析では式(3)~(5)に示すように、未知関数を基本密度関数と多項式で近似しているので、き裂先端の応力拡大係数の滑らかな分布を得る

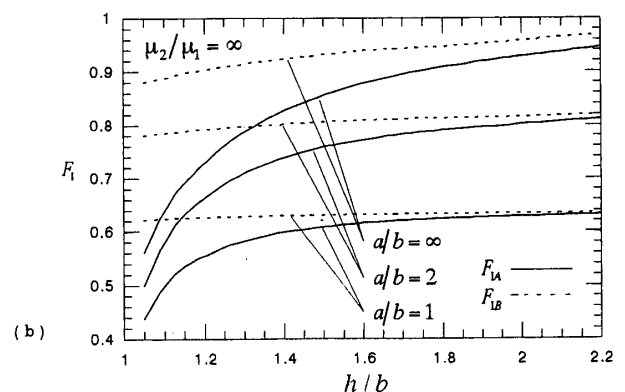
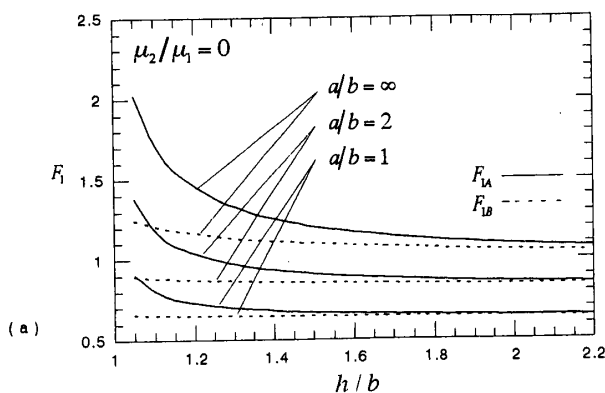


Fig.3 Variation of F_{Ib}, F_{Ia} in Fig.1 when (a) $\mu_2/\mu_1 = 0$, (b) $\mu_2/\mu_1 = \infty$ with $v_1, v_2 = 0.3$.

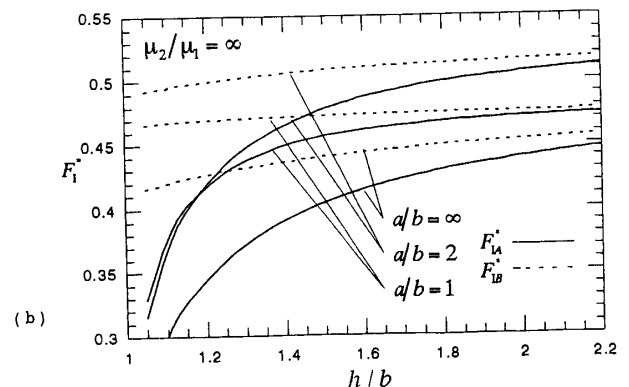
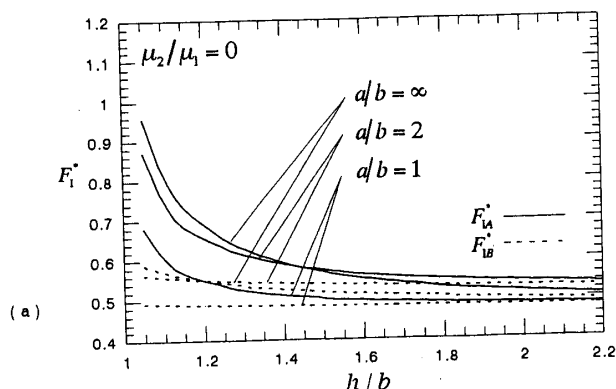


Fig.4 Variation of F_{Ib}^*, F_{Ia}^* in Fig.1 when (a) $\mu_2/\mu_1 = 0$, (b) $\mu_2/\mu_1 = \infty$ with $v_1, v_2 = 0.3$.

Table.4 Dimension stress intensity factors F_A, F_B, F_A^*, F_B^* when $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ in Fig.1.

h/b	a/b	F_A			F_A^*			F_B			F_B^*		
		$\mu_2/\mu_1 = 0$	$\mu_2/\mu_1 = 0.5$	$\mu_2/\mu_1 = 2$	$\mu_2/\mu_1 = \infty$	$\mu_2/\mu_1 = 0$	$\mu_2/\mu_1 = 0.5$	$\mu_2/\mu_1 = 2$	$\mu_2/\mu_1 = \infty$	$\mu_2/\mu_1 = 0$	$\mu_2/\mu_1 = 0.5$	$\mu_2/\mu_1 = 2$	$\mu_2/\mu_1 = \infty$
1.05	1	0.9066	0.7120	0.5680	0.4381	0.6810	0.5348	0.4266	0.3291	0.6560	0.6423	0.6314	0.6213
	2	1.3781	0.9654	0.7070	0.4999	0.8704	0.6098	0.4466	0.3157	0.8935	0.8439	0.8095	0.7797
	∞	2.0222	1.2126	0.8347	0.5613	0.9562	0.5734	0.3947	0.2654	1.2442	1.0558	0.9555	0.8800
1.1	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.4483	0.5872	0.6805	0.7805	0.7122	0.9327	1.0808	1.2400	0.5272	0.6084	0.6608	0.7060
	1	0.8071	0.6863	0.5901	0.4989	0.6062	0.5155	0.4432	0.3747	0.6535	0.6416	0.6320	0.6229
	2	1.1859	0.9230	0.7394	0.5799	0.7490	0.5830	0.4670	0.3663	0.8842	0.8419	0.8111	0.7838
1.2	∞	1.7237	1.1637	0.8668	0.6379	0.8151	0.5503	0.4099	0.3016	1.2081	1.0495	0.9592	0.8882
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.4682	0.5898	0.6808	0.7821	0.7437	0.9368	1.0812	1.2424	0.5409	0.6113	0.6589	0.7013
	1	0.7331	0.6653	0.6094	0.5550	0.5507	0.4997	0.4577	0.4169	0.6500	0.6406	0.6329	0.6255
1.25	2	1.0408	0.8866	0.7699	0.6627	0.6574	0.5600	0.4863	0.4186	0.8715	0.8388	0.8137	0.7909
	∞	1.4621	1.1136	0.9029	0.7278	0.6914	0.5266	0.4270	0.3442	1.1659	1.0411	0.9654	0.9033
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5014	0.5974	0.6749	0.7626	0.7965	0.9489	1.0719	1.2112	0.5575	0.6153	0.6556	0.6925
1.3	1	0.6994	0.6554	0.6187	0.5826	0.5253	0.4923	0.4647	0.4376	0.6476	0.6399	0.6335	0.6274
	2	0.9729	0.8683	0.7861	0.7087	0.6145	0.5484	0.4965	0.4476	0.8630	0.8317	0.8157	0.7965
	∞	1.3297	1.0855	0.9251	0.7866	0.6288	0.5133	0.4375	0.3720	1.1326	1.0346	0.9697	0.9138
1.4	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5260	0.6038	0.6688	0.7407	0.8354	0.9591	1.0622	1.1763	0.5718	0.6185	0.6533	0.6866
	1	0.6806	0.6499	0.6239	0.5985	0.5112	0.4882	0.4686	0.4495	0.6457	0.6393	0.6340	0.6289
	2	0.9337	0.8573	0.7961	0.7379	0.5897	0.5415	0.5028	0.4661	0.8566	0.8347	0.8173	0.8010
1.6	∞	1.2535	1.0676	0.9399	0.8264	0.5927	0.5048	0.4445	0.3908	1.1118	1.0299	0.9734	0.9233
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5430	0.6087	0.6638	0.7242	0.8625	0.9671	1.0542	1.1502	0.5808	0.6207	0.6513	0.6811
	1	0.6615	0.6441	0.6295	0.6152	0.4969	0.4838	0.4728	0.4621	0.6431	0.6386	0.6348	0.6311
1.8	2	0.8904	0.8449	0.8077	0.7719	0.5624	0.5337	0.5102	0.4875	0.8478	0.8322	0.8196	0.8077
	∞	1.1670	1.0460	0.9683	0.8774	0.5518	0.4946	0.4579	0.4149	1.0840	1.0231	0.9790	0.9384
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5668	0.6158	0.6501	0.7012	0.9005	0.9782	1.0325	1.1138	0.5933	0.6242	0.6484	0.6725
2.0	1	0.6522	0.6413	0.6322	0.6232	0.4899	0.4817	0.4749	0.4681	0.6414	0.6381	0.6352	0.6325
	2	0.8681	0.8383	0.8138	0.7901	0.5483	0.5295	0.5140	0.4990	0.8421	0.8306	0.8212	0.8122
	∞	1.1200	1.0336	0.9691	0.9082	0.5296	0.4888	0.4583	0.4295	1.0661	1.0185	0.9830	0.9495
2.0	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5823	0.6205	0.6524	0.6862	0.9250	0.9855	1.0362	1.0899	0.6016	0.6265	0.6462	0.6661
	1	0.6470	0.6397	0.6336	0.6277	0.4860	0.4805	0.4759	0.4715	0.6403	0.6377	0.6356	0.6335
	2	0.8551	0.8345	0.8174	0.8010	0.5401	0.5271	0.5163	0.5059	0.8382	0.8294	0.8222	0.8153
∞	∞	1.0909	1.0258	0.9761	0.9285	0.5159	0.4851	0.4616	0.4391	1.0536	1.0152	0.9859	0.9579
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.5931	0.6236	0.6491	0.6760	0.9420	0.9905	1.0310	1.0738	0.6077	0.6282	0.6447	0.6613
	1	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.4782	0.4782	0.4782	0.4782	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366
∞	2	0.8257	0.8257	0.8257	0.8257	0.5215	0.5215	0.5215	0.5215	0.8257	0.8257	0.8257	0.8257
	∞	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	(a/b=1)/(a/b= ∞)	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	1.0112	1.0112	1.0112	1.0112	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366

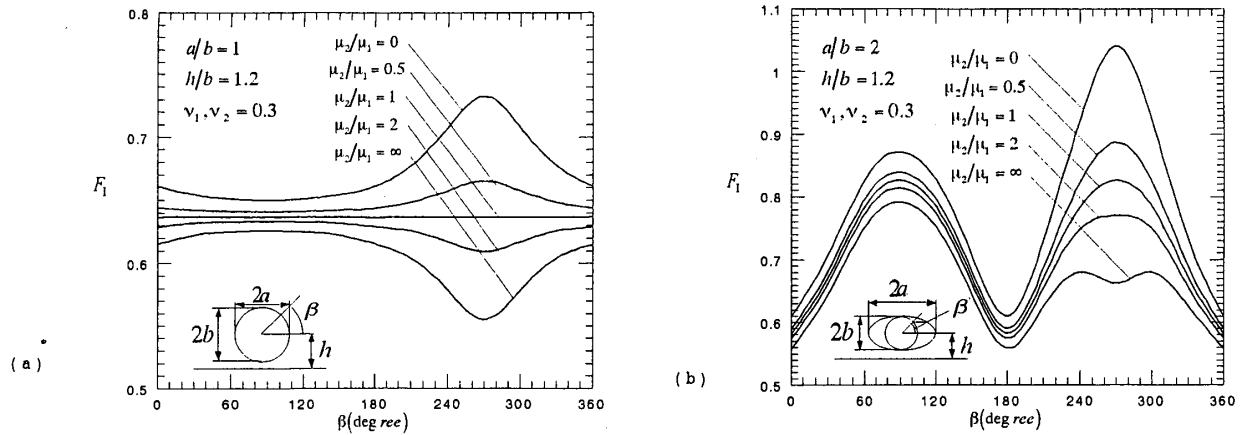


Fig. 5 Variation of F_I in Fig. 1 when (a) $a/b=1$, (b) $a/b=2$ with $h/b=1.2$, $\nu_1, \nu_2=0.3$.

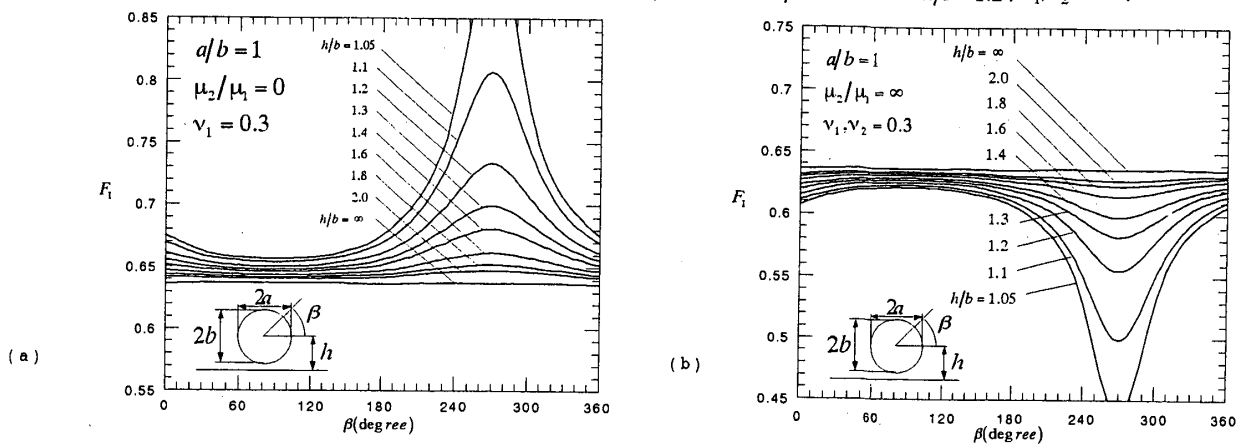


Fig. 6 Variation of F_I in Fig. 1 when (a) $\mu_2/\mu_1=0$, (b) $\mu_2/\mu_1=\infty$ with $a/b=1$, $\nu_1, \nu_2=0.3$.

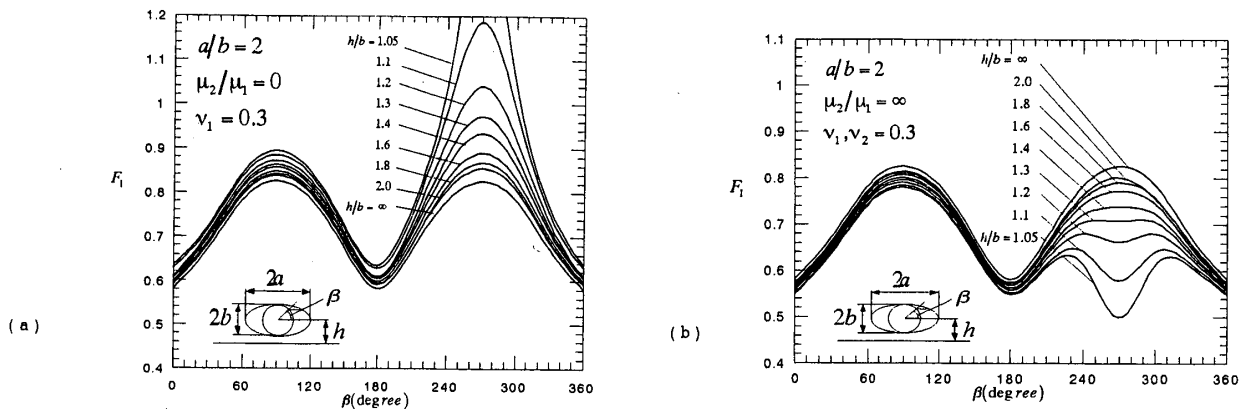


Fig. 7 Variation of F_I in Fig. 1 when (a) $\mu_2/\mu_1=0$, (b) $\mu_2/\mu_1=\infty$ with $a/b=2$, $\nu_1, \nu_2=0.3$.

ことが可能である。

5. 結 言

異材接合界面に垂直に存在する3次元円形き裂(図1)を対象として界面からの距離, き裂の形状比, 及び材料の剛性比を変化させてそれらのパラメータがき裂の応力拡大係数に及ぼす影響を検討した。その結果, 以下のよう
な点が明らかになった。

(1) 異材接合界面に垂直な3次元き裂を $\sqrt{area}$ パラメー

タで整理すると解析を行った $h/b \geq 1.05$ の範囲で形状比 a/b の影響は比較的小さい。例えば形状比の最も大きく表れる $h/b=1.05$ でも, $a/b=0$ と $a/b \rightarrow 0$ の F_I^* の比は $0.71 \sim 1.24 \approx 1$ である。即ち $\sqrt{area}$ パラメータで3次元き裂の結果を整理することが有用である。

(2) 本解析では未知関数を基本密度関数と多項式で近似しているの, き裂先端の応力拡大係数の滑らかな分布が得られる(図5~7)。例えば図5(a) $a/b=1$, $h/b=1.2$ の $\mu_2/\mu_1=1$ のときの F_I の値を規準としたとき, 点Aにお

ける $\mu_2/\mu_1 = 0.5$ の値は 4.5% 危険になるのに対して、 $\mu_2/\mu_1 = 2$ の値は 4.3% 安全になる。

(3) 界面に垂直に存在する円形き裂が遠方で引張りの荷重を受ける問題を体積力法の特異積分方程式を解析して考察した。未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似することによってき裂の形状比 $a/b = 1, 2, \infty$ で界面との距離 $h/b \geq 1.05$ で有効数字3桁程度以上の収束性(表1, 2)が得られた。

文 献

- (1) Erdogan, F., and Aksogan, O., Bonded Half Planes Containing an Arbitrarily Oriented Crack, Int. J. Solids Structures, **10**(1974), 569-585.
- (2) Cook, T.S., and Erdogan, F., Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface, Int. J. Engng. Sci., **10**(1972), 677-697.
- (3) 石田誠・野口博司, 任意分布き裂群を持つ接合半無限体の面内荷重問題, 機論, **49-437 A**(1983), 36-45.
- (4) Willis, J.R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, Q.J. Mech. & Appl. Math., **25** (1972), 367-385.
- (5) Erdogan, F., and Arin, K., Penny-Shaped Interface Crack Between an Elastic Layer and a Half-Space, Int. J. Solids Structure, **8**(1972), 93-109.
- (6) Kassir, M.K., and Bregman, A.M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack Between Two Dissimilar Materials, ASME Journal of Applied Mechanics, **39** (1972), 308-301.
- (7) Lee, J.C., Farris, T.N., and Keer, L.M., Stress Intensity Factors for Cracks of Arbitrary Shape Near an Interfacial Boundary, Engineering Fracture Mechanics, **27-1**, (1987), 27-41.
- (8) Shibuya, T., Koizumi, T., and Iwamoto, T., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bounded Half-Spaces, JSME Int. J., **32** (1989), 485-491.
- (9) Nakamura, T., Three-Dimensional Stress Fields of Elastic Interfaces Cracks, ASME Journal of Applied Mechanics, **58**(1991), 939-946.
- (10) 結城良治・許金泉, 三次元異材継手・異材界面き裂の BEM 解析, 機論, **58-545, A**(1992), 39-46.
- (11) 野田尚昭・大園増里・陳夢成, 異種材料接合界面に平行に存在する円形き裂の引張りにおける応力拡大係数の解析, 機論, **68-674, A**(2002), 1453-1459.
- (12) 野田尚昭・山下務・永石雅大・小野勝也, 異種接合界面に平行なき裂の $\sqrt{area}$ パラメータによる評価, 材料, **52-12**, (2003), 1471-1477.
- (13) 野口博司・石田誠・鶴秀登, 三次元き裂問題の高精度新解析法(第2報, 任意形状の表面・内部き裂を持つ半無限体問題への応用), 機論, **59-561, A**(1993), 1279-1286.
- (14) 小田和広・村岡善之・野田尚昭, 特異積分方程式による自由表面近傍の円形内部き裂の解析, 機論, **67-664, A**(2001), 2025-2031.
- (15) 秦太験・野田尚昭, 特異積分方程式法による異種接合界面に接する三次元き裂の理論的解析, 機論, **67-664, A**(2001), 2039-2044.
- (16) 秦太験・野田尚昭, 異種材料接合界面に接する三次元長方形き裂の一般化応力拡大係数の解析, 機論, **68-667, A**(2002), 442-447.
- (17) 野田尚昭・秦太験・永石雅大・山下務, 異種接合界面に接するき裂の $\sqrt{area}$ パラメータによる応力拡大係数評価式, 材料, **51-8**, (2002), 880-885.
- (18) 野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, **61-586, A**(1995), 1232-1240.
- (19) 村上敬宜・石田誠, 任意形状表面き裂の応力拡大係数の解析と表面近傍の応力場, 機論, **51-464, A**(1985), 1050-1056.
- (20) 村上敬宜・児玉昭太郎・小沼静代, 高強度鋼の疲労強度に及ぼす介在物の影響の定量的評価法, 機論, **54-500, A**(1988), 688-696.
- (21) Oda, K., Noda, N.A., and Hashim, M.J., Analysis of Interaction Between Interface Cracks and Internal Cracks Using Singular Integral Equation of Body Force Method, in Damage and Fracture Mechanics, Computational Mechanics Publications, Southampton, (1998), 34-42.